Die reellen Zahlen nach Cantor

Dustin Lazarovici*

3. Dezember 2013

In unserem ersten Vortrag sind wir den Pythagoreern gefolgt und haben die *Inkommensurabilität* entdeckt: Es gibt Strecken, die kein gemeinsames Maß haben und deren Längenverhältnis man folglich nicht als Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken kann. Von der Art sind etwa Diagonale und Seite im Quadrat. Wir nennen deren Streckenverhältnis $\sqrt{2}$. Auch dieses Verhältnis ist also *ZAHL*, aber keine Zahl in dem Sinne, wie es die früheren Pythagoreer verstanden haben. Wir nennen sie *irrational*, weil sie sich nicht als Bruch schreiben lässt, also als Verhältnis ganzer Zahlen. Sie lässt sich aber auch nicht als endlicher Dezimalbruch schreiben. Wir können $\sqrt{2}$ zumindest als Wurzel einer rationalen Gleichung begreifen, nämlich als positive Lösung von $x^2 - 2 = 0$. Solche Zahlen nennen wir *algebraisch*. Wir haben aber auch gelernt, dass es Zahlen gibt, die nicht einmal von dieser Art sind – tatsäschlich sind *fast alle* Zahlen nicht einmal algebraisch. Man sollte dann einmal darüber nachdenken, in welchem Sinne man sie überhaupt begreifen kann.

Wir haben auch gelernt, dass die Pythagoreer schon einen erstaunlich guten Algorithmus kannten, mit dem sie das Verhältnis von Diagonale und Seitenlänge im Quadrat näherungsweise berechnen konnten. Diese Algorithmus ergibt sich aus der Umkehrung der Wechselwegnahme. Wir erinnern uns an die gefundene Steintafel mit den Zahlenkolonnen:

1	1
2	3
5	7

*Dustin.Lazarovici@mathematik.uni-muenchen.de

Führen wir den Algorithmus[1] fort, so erhalten wir die Zahlenwerte:

a_k	d_k	d_k/a_k
1	1	1
2	3	1,5
5	7	1,4
12	17	1.41666666
29	41	1,41379310
70	99	1,41428571
169	239	1,41420118
408	577	1,41421568
986	1393	1,41421319
2378	3363	1,41421362
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$

Natürlich bricht dieser Algorithmus niemals ab (genauso wie die Dezimalfolge von $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887 24...$ niemals abbricht). Mit der Irrationalität hält also auch das *Unendliche* Einzug in die Mathematik. Wenn wir die dritte Spalte betrachten, also die *Folge* der Approximativen für das Streckenverhältnis Diagonal/Seitenlänge ist, dann bemerken wir, dass die Änderungen immer kleiner werden. Die Folge beginnt auf der Stelle zu treten. Schon nach 8 Iterationen ändert sich der Wert nur noch ab der siebten Nachkommastelle, die Schwankungen sind also bereits kleiner als 10^{-6} oder ein Millionstel der Startnäherung. Es sieht also so aus, als würde sich die Folge tatsäschlich *ETWAS* nähern. In der Zahlenwelt der Pythagoreer fehlte aber dieses *ETWAS*, dem sich die Werte nähern konnten. Heutzutage nennen wir dieses etwas $\sqrt{2}$ und begreifen es als *ZAHL*.

Die Zahlen, in diesem abstrakten Sinne, finden letztlich Platz im Körper der *reellen Zahlen*. Nach Entdeckung der Irrationalität durch die Pythagoreer, sollte es noch über zwei Jahrtausende dauern, bis die reellen Zahlen durch Georg Cantor und Richard Dedekind auf eine solide Grundlage gestellt wurden. Das zeigt uns schon, dass hier ein grandioser Abstraktionsschritt geschehen musste und eine große intellektuelle Leistung.

Betrachten wir zunächst die Konstruktion der reellen Zahlen nach Cantor. Diese startet von der Beobachtung, dass es solche besonderen Folgen gibt, wir nennen sie *Fundamentalfolgen* oder *Cauchyfolgen*, deren Schwankungen beliebig klein werden, die irgendwann anfangen “auf der Stelle zu treten”. Wenn wir uns die Folgenglieder als Einschläge auf dem Zahlenstrahl denken, so scheinen sich diese beliebig nahe um einen Punkt zu sammeln. Es

[1] Seien a_k, d_k gegeben, dann ist $a_{k+1} = a_k + d_k$ und $d_{k+1} = 2a_{k+1} - d_k$.

kann nun aber passieren, dass für eine solche Folge in den rationalen Zahlen kein Grenzwert existiert (man denke zum Beispiel an die Dezimalfolge von $\sqrt{2}$, oder die Teilsummenfolge der Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$). Uns mag es nun schon ganz natürlich erscheinen zu behaupten, diesem Punkt auf dem Zahlenstrahl entspreche eben eine reelle, irrationale Zahl. Man muss sich aber vor Augen führen, was für ein wagemutiger Schritt hier gemacht wird, denn mit der Existenz jenes Punktes behaupten wir ja gerade das, was uns zunächst *nicht* gegeben ist, nämlich die Existenz eines Grenzwertes besagter Folge. Die Logik ist also vielmehr diese : diese Tatsache, dass rationale Fundamentalfolgen existieren, die keinen rationalen Grenzwert besitzen, macht uns gerade auf die "Fehlstellen" in $\mathbb{Q}$ aufmerksam, ist also eine Möglichkeit die *Unvollständigkeit* der rationalen Zahlen zu begreifen. Cantor's genialer Schritt besteht nun darin, *die Folgen selbst* mit Zahlen zu identifizieren, die wir dann *reelle Zahlen* nennen, und deren Menge einen vollständigen Zahlenkörper bildet. Das ist nun also unser Programm. Beginnen wir zunächst mit der grundlegenden Definition:

Definition:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen $a_n \in \mathbb{Q}$ heißt *Fundamentalfolge* (oder Cauchy-Folge), falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall k, l \geq N : \; |a_k - a_l| < \epsilon.$$

Mit $\mathcal{F} := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_n \text{ Fundamentalfolge in } \mathbb{Q}\}$ bezeichnen wir die Menge aller solcher Fundamentalfolgen.

Zu dieser Definition muss noch etwas gesagt werden. Aus der Analysis sind wir es ja gewohnt, an $\epsilon > 0$ als eine beliebig kleine, *reelle* Zahl zu denken. Das kann hier aber nicht gemeint sein, da wir die reellen Zahlen erst konstruieren wollen. Gemeint ist also $\epsilon \in \mathbb{Q}$. Um aber einzusehen, dass rationale ϵ ausreichend sind um auszudrücken was wir ausdrücken wollen, brauchen wir das *Archimedische Axiom.* Dieses besagt:

> Gegeben eine (beliebig kleine) Strecke δ und eine (beliebig große) Strecke L, so existiert eine natürliche Zahl N mit $N \cdot \delta > L$.

Mit anderen Worten: zu jeder noch so kleinen Strecke δ gibt es eine natürliche Zahl N, sodass in Einheiten der Strecke L gilt: $1/N < \epsilon$. Darum genügt es, um einen Begriff von "beliebig kleinen Abtsänden" im Kontinuum zu fassen, rationale ϵ zu betrachten oder sogar nur ϵ aus der Menge $\{\frac{1}{N} \mid N \in \mathbb{N}\}$.

Nun konstruieren wir aus dieser Menge $\mathcal{F}$ der Fundamentalfolgen einen Zahlenkörper, den wir schließlich mit dem Körper der reellen Zahlen identifizieren wollen.

Schritt 1: Addition und Multiplikation

Wir müssen znächst eine Multiplikation und Addition definieren, die für Folgen Sinn macht. Dies geschieht natürlicherweise komponentenweise, d.h. für $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ setzen wir

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Hier ist nun aber etwas nachzuprüfen, nämlich dass die Menge der Fundamentalfolgen bezüglich dieser Verknüpfungen abgeschlossen ist, d.h. dass Summe und Produkt zweier Fundamentalfolgen wieder Fundamentalfolgen sind.

Zeige: Sind $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}$, dann auch $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{F},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathcal{F}$.

Diese Verknüpfungen machen $\mathcal{F}$ zu einem *Ring*. Wir haben nämlich ein Nullelement, das ist die $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \ldots)$, mit $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a},\ \forall \mathbf{a} \in \mathcal{F}$, und zu jeder Folge $\mathbf{a} = (a_n)_n \in \mathcal{F}$ ein additiv Inverses $-\mathbf{a} = (-a_n)_n$ mit $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) =: \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Schritt 2: Äquivalenzrelation

Jede Fundamentalfolge soll einer reellen Zahl entsprechen. Nun kann es aber sein, dass verschiedene Folgen *derselben* reellen Zahl entsprechen; man denke etwa an $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_n$ und $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$, oder an zwei Folgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern unterscheiden. Wir müssen also verschiedene Fundamentalfolgen miteinander *identifizieren*, wenn sie sich, anschaulich gesprochen, dem selben Punkt auf dem Zahlenstrahl nähern. Wir können natürlich *nicht* sagen, zwei Folgen seien äquivalent, wenn sie gegen die selbe reelle Zahl konvergieren, denn diese reellen Zahlen wollen wir ja erst konstruieren. Wir können aber sagen, zwei Folgen $(a_n)_n,\ (b_n)_n$ seien äquivalent, *wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.* Wir setzen also

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

wobei die Konvergenz in $\mathbb{Q}$ zu verstehen ist.

Man überprüft leicht, dass dies tatsächlich eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathcal{F}$ definiert. Wir schreiben $[(a_n)_n]$ für die Äquivalenzklasse von $(a_n)_n$ (die Menge aller Fundamentalfolgen, die äquivalent zu $(a_n)_n$ sind) und

$$\mathcal{R} = \{\alpha = [(a_n)_n] \mid (a_n)_n \in \mathcal{F}\}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen, die wir am Ende mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen identifizieren wollen.

Nun hatten wir Addition und Multiplikation auf der Menge F der Fundamentalfolgen definiert. Tatsächlich induzieren diese Verknüpfungen aber auch Addition und Multiplikation auf der Menge $\mathcal{R}$, die aus Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen besteht. Dazu definiert man für $\alpha := [(a_n)_n], \beta := [(b_n)_n] \in \mathcal{R}$:

$$\alpha + \beta := [(a_n + b_n)_n]$$

$$\alpha \cdot \beta := [(a_n \cdot b_n)_n]$$

Hier muss man aber unbedingt nachprüfen, dass diese Operationen auf $\mathcal{R}$ *wohldefiniert* sind, d.h. unabhängig von der Wahl der *Repräsentanten* der Äquivalenzklassen. In unserer Konstruktion stellen ja unendlich viele rationale Fundamentalfolgen die selbe reelle Zahl dar, aber die Summe bzw. das Produkt zweier Zahlen α und β aus $\mathcal{R}$ darf natürlich nicht davon abhängen, welche rationale Fundamentalfolge man hernimmt um sie darzustellen. Wir müssen also zeigen: gilt $(a_n) \sim (a'_n)$ und $(b_n) \sim (b'_n)$, dann auch $(a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n)$, also $[(a_n + b_n)] = [(a'_n + b'_n)] \in \mathcal{R}$. Und ebenso für das Produkt: $(a_n) \sim (a'_n)$ und $(b_n) \sim (b'_n) \Rightarrow (a_n \cdot b_n) \sim (a'_n \cdot b'_n)$, also $[(a_n \cdot b_n)] = [(a'_n \cdot b'_n)]$.

Beweis: Es seien also $(a_n) \sim (a'_n)$, d.h. $a_n - a'_n \longrightarrow 0$ und $(b_n) \sim (b'_n)_n$, d.h. $b_n - b'_n \longrightarrow 0$. Dann gilt:

$$a_n b_n - a'_n b'_n = a_n b_n - a_n b' n + a_n b'_n - a'_n b'_n = a_n(b_n - b'_n) + (a_n - a'_n) b'_n.$$

Nun sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Cauchyfolgen und deshalb beschränkt (Wieso?). Es existieren also natürliche Zahlen N_a, N_b mit $|a_n| < N_a, \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $|b'_n| < N_b, \ \forall n$. Damit gilt nun:

$$|a_n b_n - a'_n b'_n| \leq |a_n(b_n - b'_n)| + |(a_n - a'_n) b'_n| < N_a |b_n - b'_n| + |a_n - a'_n| N_b \longrightarrow 0,$$

denn weil $|a_n - a'_n| \to 0$ und $|b_n - b'_n| \to 0$, konvergiert auch deren Summe gegen 0. Der Leser überlege sich den entsprechenden Beweis für die Addition.

Wir müssen eine weitere kleine Schwierigkeit bemerken. Wenn die Menge $\mathcal{R}$ die reellen Zahlen darstellen soll, dann müssten ja die rationalen Zahlen eine

Teilmenge davon sein. Gemäß unserer Konstruktion, gilt aber sicherlich *nicht* $\mathbb{Q} \subset \mathcal{R}$, denn die Elemente von $\mathbb{Q}$ sind ja rationale Zahlen, die Elemente von $\mathcal{R}$ aber Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen von rationalen Zahlen. Wir können aber auf natürliche Weise $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{R}$ *einbetten*, nämlich durch:

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{R};\\ &q \mapsto \overline{q} := [(q, q, q, \ldots)].\end{aligned}$$

Die rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ entspricht in $\mathcal{R}$ also der Äquivalenzklasse der Folge, die konstant gleich q ist (und damit der Äquivalenzklasse jeder Folge, die in $\mathbb{Q}$ gegen q konvergiert). In diesem Sinne können wir dann $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathcal{R}$ betrachten, indem wir jedes $q \in \mathbb{Q}$ mit $\overline{q}$ identifizieren.

Schritt 3: Das Inverse der Multiplikation

Wenn wir unsere Menge $\mathcal{R}$ mit den reellen Zahl identifizieren wollen, dann müssen wir $\mathcal{R}$ auch die Struktur eines *Zahlenkörpers* geben. D.h. wir wollen nicht nur in der Lage sein, Elemente zu Addieren und zu Multiplizieren, sondern zu jedem Element $\alpha \neq \mathbf{0}$ soll ein *multiplikativ Inverses* α^{-1} existieren mit $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbf{1}$. Hierbei ist $\mathbf{1} = [(1, 1, 1, \ldots)]$ das neutrale Element der Multiplikation in $\mathcal{R}$.

Es sei $\mathbf{0} \neq \alpha = [(a_1, a_2, a_3, \ldots)] \in \mathcal{R}$. Die Fundamentalfolge $(a_n)_n$ ist also ein Repräsentant der Äquivalenzklasse α. Man möchte nun vielleicht als Repräsentant des Inversen einfach $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots)$ setzen. Das kann aber mächtig schiefgehen, nämlich dann, wenn einer oder mehrere der Folgenglieder gleich 0 sind... Um dieses Problem zu umgehen, vergewissern wir uns zumächst, dass aber *höchstens endlich viele* Folgenglieder 0 sein können. Dazu beweisen wir folgendes **Lemma**:

Ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge mit $a_n = 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann gilt bereits $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und damit $[(a_n)_n] = 0 \in \mathcal{R}$.

Beweis: Auf Grund der Cauchy-Eigenschaft finden wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Ist nun $a_n = 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann existiert auch immer ein $m \geq N(\epsilon)$ mit $a_m = 0$. Damit gilt aber $|a_n - a_m| = |a_n| < \epsilon$, $\forall n \geq N$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und damit $[(a_n)_n] = 0 \in \mathcal{R}$.

Ist also $\alpha \neq 0 \in \mathcal{R}$ und $(a_n)_n$ ein Repräsentant der entsprechenden Äquivalenzklasse, so hat $(a_n)_n$ höchstens endlich viele Folgenglieder, die 0 sind. Nun definieren wir $\alpha^{-1} := [(\tilde{a}_n)_n)]$ mit

$$\tilde{a}_n \;=\; \begin{cases} 1 & \text{, falls } a_n = 0 \\ \frac{1}{a_n} & \text{, falls } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Damit ist nun $a_n \cdot \tilde{a}_n = 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und deshalb tatsächlich

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = [(1, 1, 1, \ldots)] = \mathbf{1} \in \mathcal{R}.$$

Nun wäre auch hier noch zu zeigen, dass die Inversenbildung unabhängig vom gewählten Repräsentanten ist. Wir überlassen dies dem Leser zur Übung.

Schritt 4: Anordnung

Wir haben nun auf $\mathcal{F}/\sim$ tatsächlich die algebraische Struktur eines Zahlenkörpers. Eine andere wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen ist aber die *Anordnung*. Das heißt, wir können für zwei reelle Zahlen α, β immer angeben, ob gilt $\alpha \leq \beta$ oder $\alpha > \beta$.

Wie drücken wir das nun aus für unsere Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen? Nun, anschaulich stellt ja die Folge $(a_n)_n$ eine kleinere reelle Zahl dar als die Folge $(b_n)_n$, wenn sie sich im Kontinuum (d.h. auf dem Zahlenstrahl) einem Punkt nähert, der "weiter links" liegt als jener Punkt, dem sich $(b_n)_n$ annähert. Das können wir nun so ausdrücken:

Für $\alpha = [(a_n)], \beta = [(b_n)]$ sei $\alpha < \beta$, genau dann wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $b_n - a_n > \delta$ *für alle bis auf endlich viele* $n \in \mathbb{N}$. Formaler:

$$\beta :\Longleftrightarrow \; \exists \delta > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : b_n - a_n > \delta, \; \forall n \geq N.$$

Man überlege sich, dass diese Definition wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, und unsere intuitive Vorstellung von der Anordnung der reellen Zahlen fasst.

Schritt 5: Vollständigkeit

Kommen wir nun zum technisch anspruchsvollsten Teil, der *Vollständigkeit* von $\mathcal{R}$. Wir haben der Menge $\mathcal{R}$ bereits die Struktur eines angeordneten Körpers gegeben. Einen solchen Körper haben aber bereits die rationalen Zahlen ergeben. Uns fehlt also noch die entscheidende Eigenschaft, die es rechtfertigt, $\mathcal{R}$ als Modell des Kontinuums zu begreifen, also tatsächlich mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu identifizieren. Diese Eigenschaft ist die *Vollständigkeit.*

Wir haben ja unsere Diskussion mit der Feststellung begonnen, dass uns die Existenz rationaler Fundamentalfolgen, die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzen, auf "Fehlstellen" in den rationalen Zahlen aufmerksam machen, also die *Unvollständigkeit* von $\mathbb{Q}$ bedeuten. Wir haben dann gesagt, dass einer solchen "Fehlstelle" eine reelle Zahl entspricht und die Fundamentalfolge selbst (bzw. ihre Äquivalenzklasse) mit dieser Zahl identifiziert. Nun müssen wir aber zeigen, dass wir damit wirklich das Kontinuum beschreiben, das also unser Zahlenkörper $\mathcal{R}$ nicht selbst wieder unvollständig ist. Präzise wird das durch folgenden Satz ausgedrückt:

Satz: Vollständigkeit von $\mathcal{R}$.

Ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{R}$, so ist sie in $\mathcal{R}$ konvergent, d.h. es existiert $\alpha \in \mathcal{R}$ mit $\alpha_n \longrightarrow \alpha$, für $n \to \infty$.

Zunächst bemerken wir folgendes: Es sei $(q_n)_n$ eine rationale Fundamentalfolge. Wie wir wissen ist es möglich, dass diese Folge keinen rationalen Grenzwert besitzt, obwohl sie die Cauchy-Eigenschaft erfüllt. In $\mathcal{R}$ *hat* die eingebettete Folge $(\overline{q_n})_n$ aber einen Grenzwert und zwar $[(q_n)_n]$, also die Äquivalenzklasse der Folge selber. Das sieht man wie folgt:

Es sei $\gamma = [(q_n)_n]$. Wir müssen zeigen: $\overline{q_n} \to \gamma$ in $\mathcal{R}$. Sei $\mathbb{Q} \ni \epsilon > 0$. Wir müssen nun ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit $|\overline{q_n} - \gamma|_{\mathcal{R}} \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Nun ist $|\overline{q_n} - \gamma|_{\mathcal{R}}$ wieder ein Element in $\mathcal{R}$, und zwar die Äquivalenzklasse der Folge

$$(|q_n - q_1|, |q_n - q_2|, ..., |q_n - q_m|, ...).$$

Nach Definition der Ordnungsrelation genügt es nun zu zeigen, dass $|q_n - q_m| < \epsilon$ für *fast alle* $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt nämlich $|\overline{q_n} - \gamma|_{\mathcal{R}} \leq \epsilon$ in $\mathcal{R}$. Aber das ergibt sich sofort aus der Cauchy-Eigenschaft von $(q_n)_n$. Per Definition besagt diese nämlich, dass für beliebiges $\mathbb{Q} \ni \delta$ mit $0 < \delta < \epsilon$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|q_n - q_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Mit diesem N gilt dann $|\overline{q_n} - \gamma|_{\mathcal{R}} < \epsilon$, $\forall n \geq N$ (denn für $n \geq N$ ist insbesondere $|q_n - q_m| < \epsilon$ für fast alle m, nämlich alle $m \geq N$). Damit ist die gewünschte Konvergenz gezeigt. Wir haben also folgendes Lemma bewiesen:

Lemma: Rationale Fundamentalfolgen konvergieren in $\mathcal{R}$.

Ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Fundamentalfolge, so ist die eingebettete Folge $(\overline{q_n})_n$ in $\mathcal{R}$ konvergent mit Grenzwert $[(q_n)_n]$.

Dies ist ein schönes Resultat, das noch nützlich sein wird. Es genügt aber nicht für die Vollständigkeit von $\mathcal{R}$, denn dazu müssen wir ja zeigen, dass alle Cauchyfolgen von Elementen aus $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}$ konvergent sind! Kommen wir also zum eigentlichen Beweis:

Beweis: Es sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{R}$. Beachte, dass $(\alpha_k)_k$ nun eine Folge von Äquivalenzklassen von Folgen ist, also:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left[(a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots, a_n^1, \ldots)\right] \\
\alpha_2 &= \left[(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2, \ldots)\right] \\
\alpha_3 &= \left[(a_1^3, a_2^3, a_3^3, \ldots, a_n^3, \ldots)\right] \\
\vdots & \qquad \ddots \\
\alpha_k &= \left[(a_1^k, a_2^k, a_3^k, \ldots, a_n^k, \ldots)\right] \\
\vdots & \qquad \ddots
\end{aligned}
$$

mit $(a_n^k)_n \in \mathcal{F}$ einem Repräsentanten von α_k. Nun ist jeder dieser Repräsentanten eine rationale Fundamentalfolge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert deshalb in der Folge $(a_n^k)_n$ ein Folgenglied $a_{N(k)}^k$ von dem alle nachfolgenden Glieder um höchstens $\frac{1}{k}$ abweichen, d.h. es gilt $|a_n^k - a_{N(k)}^k| < \frac{1}{k}$, $\forall n \geq N(k)$. Die Folge $(d_k)_k = (a_{N(k)}^k)_k$ wird eine *Diagonalfolge* genannt, denn das $k-$te Folgenglied ist jeweils aus dem Repräsentanten $(a_n^k)_n$ von α_k gewählt.

Wir werden nun beweisen, dass $(\alpha_k)_k$ in $\mathcal{R}$ gegen $\alpha := [(d_k)_k]$ konvergiert. Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass $(d_k)_k$ überhaupt eine Fundamentalfolge ist, also $\alpha \in \mathcal{R}$ ist.

Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Cauchy-Eigenschaft von (α_k) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_k - \alpha_l|_{\mathcal{R}} < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $k, l \geq N$. Nun ist

$$|\alpha_k - \alpha_l|_{\mathcal{R}} = \left[(|a_1^k - a_1^l|, |a_2^k - a_2^l|, |a_3^k - a_3^l|, \ldots)\right].$$

$|\alpha_k - \alpha_l|_{\mathcal{R}} < \frac{\epsilon}{3}$ bedeutet also insbesondere, dass für alle $k, l \geq N$ gilt:

$$|a_n^k - a_n^l| < \frac{\epsilon}{3}, \textit{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir können zudem N groß genug wählen, damit $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{3}$. Seien nun $k, l \geq N$. Dann existieren einerseits in den Folgen $(a_n^k)_n$ und $(a_n^l)_n$ Glieder a_n^k und a_n^l mit $|a_n^k - a_n^l| < \frac{\epsilon}{3}$ (weil das für fast alle gilt), sowie $|d_k - a_n^k| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{3}$ und $|a_n^l - d_l| < \frac{1}{l} \leq \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{3}$ (weil auch das, nach Definition der Diagonalfolge, für fast alle Glieder der jeweiligen Folgen gilt). Wir folgern also:

$$|d_k - d_l| \leq |d_k - a_n^k| + |a_n^k - a_n^l| + |a_n^l - d_l| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $\alpha \in \mathcal{R}$ ist – und das war der schwierigste Teil. Es bleibt allerdings zu zeigen, dass α in der Tat Grenzwert der Folge $(\alpha_k)_k$ ist.

Sei dazu $\epsilon > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$|\alpha_k - \alpha|_{\mathcal{R}} \leq |\alpha_k - \overline{d_k}|_{\mathcal{R}} + |\overline{d_k} - \alpha|_{\mathcal{R}},$$

wobei $\overline{d_k} = [(d_k, d_k, d_k, \dots)]$ und $|\cdot|_{\mathcal{R}}$ den Betrag in $\mathcal{R}$ bezeichnet. Der erste Term entspricht nun der (Äquivalenzklasse der) Folge

$$(|a_1^k - d_k|, |a_2^k - d_k|, |a_2^k - d_k|, \dots).$$

Nun ist aber $d_k = a_{N(k)}^k$ selbst ein Element der Folge $(a_n^k)_n$ und war gerade so gewählt, dass $|a_n^k - d_k| = |a_n^k - a_{N(k)}^k| < \frac{1}{k}$ gilt für alle $n \geq N(k)$. Mit anderen Worten, es gilt $|a_n^k - d_k| < \frac{1}{k}$ für fast alle n und damit $|\alpha_k - \overline{d_k}|_{\mathcal{R}} \leq \frac{1}{k}$. Folglich: $|\alpha_k - \overline{d_k}|_{\mathcal{R}} \to 0$, für $k \to \infty$.

Für den zweiten Term gilt ebenfalls $|\overline{d_k} - \alpha|_{\mathcal{R}} \to 0$, für $k \to \infty$ nach obigem Lemma. Denn $(\overline{d_k})_k$ ist gerade die Einbettung der rationalen Fundamentalfolge $(d_k)_k$ und $\alpha := [(d_k)_k]$.

Damit ist also gezeigt, dass in $\mathcal{R}$ die Cauchy-Folge $(\alpha_k)_{k\in\mathcal{R}}$ gegen den Grenzwert α konvergiert.

$\square$

Konstruktion oder Postulat?

Alles in allem haben wir also der Menge $\mathcal{R}$ die Struktur eines *vollständigen, archimedisch angeordneten Körpers* gegeben. Dass erlaubt uns nun $\mathbb{R} := \mathcal{R}$ zu setzen, also $\mathcal{R}$ mit der Menge der reellen Zahlen zu identifizieren. Aber wie genau ist diese "Identifikation" zu verstehen? Anders gefragt: Was ist jetzt eigentlich eine *reelle Zahl*?

Heutzutage ist es üblich zu sagen, der Körper $\mathcal{R}$ sei eine *Konstruktion* von $\mathbb{R}$. Wenn wir in der Mathematik also von "reellen Zahlen" sprechen, dann meinen wir diese Objekte der Gestalt $\alpha = [(a_n)_n]$ mit den entsprechenden Verknüpfungen und Anordnungseigenschaften.[2] Diese Sichtweise ist aber recht seltsam. Sollte das etwa heißen die Wurzel von 2 IST eine Menge rationaler Fundamentalfolgen? Zudem müssten wir dann, streng genommen, etwa sagen die rationale Zahl 2 sei verschieden von der reellen Zahl 2, denn erstere ist eben eine rationale Zahl, letztere aber eine Menge von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen. Außerdem existieren ja auch andere Konstruktionen der reellen Zahlen, etwa als *Dedekind'sche Schnitte*. Welche sind dann aber die "wahren" reellen Zahlen? Ist das bloß eine Frage der Definition?

Cantor selbst wäre wohl nie auf die Idee gekommen zu sagen, die von ihm definierten Objekte seien *identisch* mit den reellen Zahlen. Vielmehr *postulierte* er, dass zu jeder rationalen Fundamentalfolge eine reelle Zahl *existiert*, die Grenzwert dieser Folge ist. Die Fundamentalfolgen, bzw. ihre Äquivalenzklassen, wären also nur eine Möglichkeit, dieser abstrakten *ZAHL* habhaft zu werden. Man könnte auch sagen, die Menge $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ sei so etwas wie ein *Name* für eine bestimmte reelle Zahl. Das macht einen großen Unterschied. Ein Name ist ja eine Bezeichnung für ein Ding, aber nicht mit diesem Ding identisch. So bezeichnet etwa das Wort "München" eine Großtadt in Bayern, ist selbst aber keine bayrische Großstadt. Das Wort "München" hat sieben Buchstaben und reimt sich auf "Hündchen", die Stadt München besteht weder aus Buchstaben noch kann sie sich auf irgendetwas reimen.

Ein Name bezieht sich aber auf etwas Reales, das unabhängig von diesem Wort existiert. Auf diese Weise begriffen, existierten also die reellen Zahlen unabhängig von unseren Konstruktionen und Defintionen. *Wo?* möchte man dann fragen und weiter: Wie kommt es, dass sie uns überhaupt zugänglich sind, dass wir etwas über sie wissen, sogar mit unumstößlicher Sicherheit beweisen können? Es lohnt sich darüber nachzudenken, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was Mathematik ist.

[2]Die rationalen Zahlen kann man ihrerseits konstruieren aus den natürlichen Zahlen und die natürlichen Zahlen werden in der Mengenlehre ebenfalls konstruiert – aus der leeren Menge $\emptyset$.